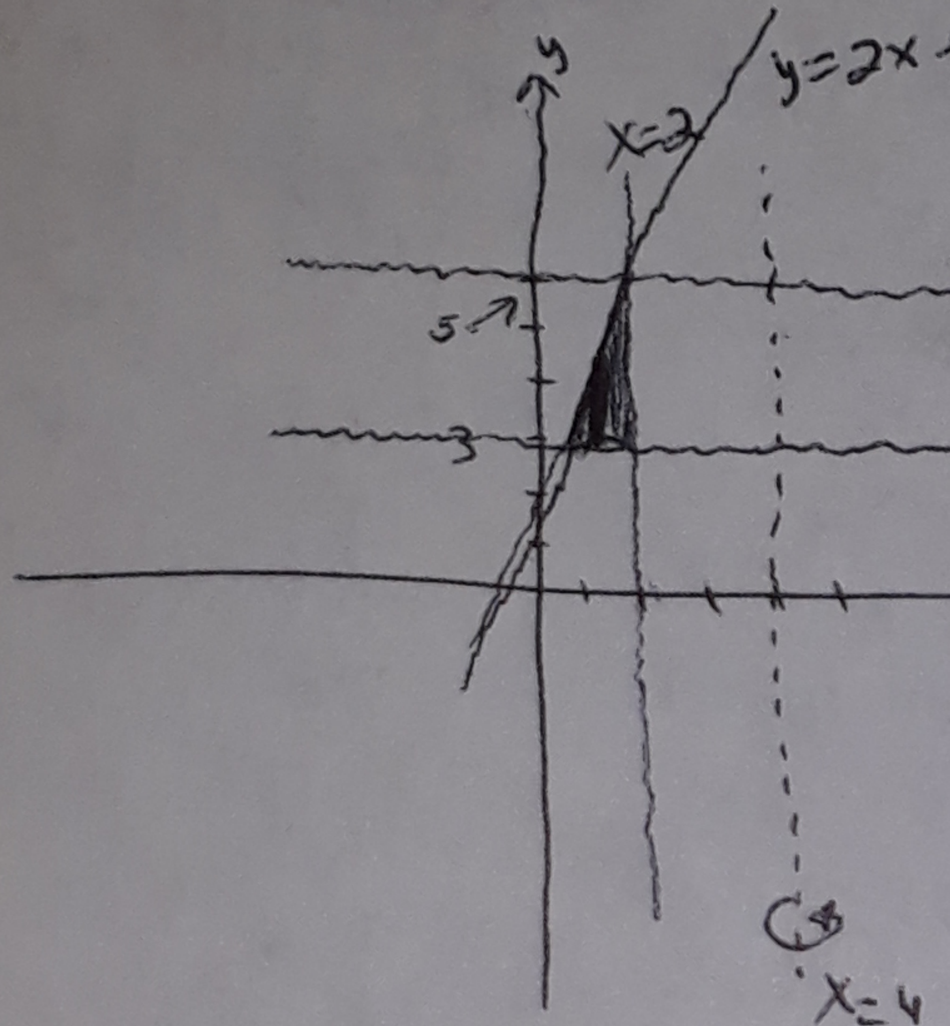
UASLP, IICO. ING. FISICA. CALCULO II. **Examen Unidad 2**. "Aplicaciones de la Integral". 19-03-2019.

Nombre: PROFESOR . Calificación: 10 puntos de 8 posibles.

INSTRUCCIONES: Utilice una NOTACIÓN MATEMÁTICA VÁLIDA y CLARA para resolver cada ejercicio en el espacio correspondiente. Utilice lápiz para escribir el procedimiento de cada ejercicio. JUSTIFICAR CADA RESPUESTA y subráyela ó enciérrela para que se le pueda asignar una calificación. PROHIBIDO EL USO DE CALCULADORA y/o CELULAR.

1. (2 Puntos) La región acotada por las gràficas de $y = 2x + 1$, $y = 5$, $y = 3$ y $x = 2$, gira alrededor de la recta $x = 4$. Calcular el volumen del sólido de revolución resultante. Use el método que considere adecuado.



CASCARONES (FÁCIL)

$(2x+1)-(3)$

$2\pi(4-x)\,dx$

$V = 2\pi \int_1^2 (4-x)(2x-2)\,dx$

$V = 2\pi \int_1^2 (-2x^2+10x-8)\,dx$

$V = 2\pi \left[-\frac{2x^3}{3} + 5x^2 - 8x\right]_1^2$

$V = 2\pi\left[\left(-\frac{16}{3}+20-16\right)-\left(-\frac{2}{3}+5-8\right)\right]$

$V = 2\pi\left[-\frac{14}{3}+7\right] = 2\pi\left[\frac{7}{3}\right]$

$V = \frac{14\pi}{3}\ u.a^3$

Rebanadas (difícil) dy

$V = \pi \int_3^5 \left[\underbrace{\left(4-\left(\tfrac{1}{2}y-\tfrac{1}{2}\right)\right)^2}_{r_{ext}^2} - \underbrace{(4-2)^2}_{r_{int}^2}\right] dy$

$V = \pi \int_3^5 \left[\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}y\right)^2 - (2)^2\right]dy = \pi \int_3^5 \left(\frac{81}{4} - \frac{9}{2}y + \frac{1}{4}y^2 - 4\right)dy$

$V = \pi \int_3^5 \left(\frac{65}{4} - \frac{9}{2}y + \frac{1}{4}y^2\right)dy = \pi\left[\frac{65}{4}y - \frac{9y^2}{4} + \frac{y^3}{12}\right]_3^5$

$V = \pi\left[\left(\frac{325}{4} - \frac{225}{4} + \frac{125}{12}\right) - \left(\frac{195}{4} - \frac{81}{4} + \frac{27}{12}\right)\right]$

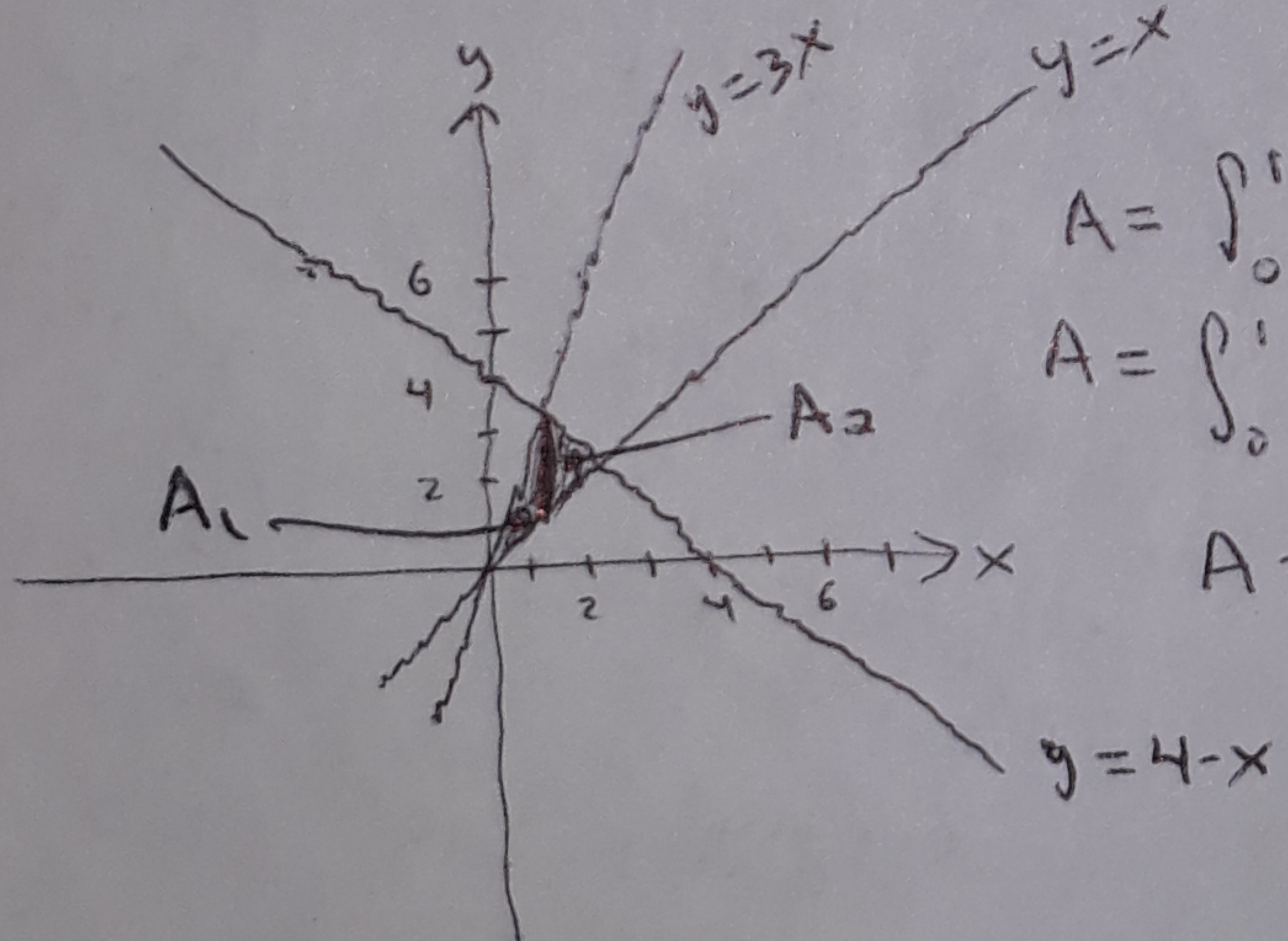
$V = \pi\left[-\frac{14}{4} + \frac{98}{12}\right] = \pi\left[-\frac{7}{2} + \frac{49}{6}\right] = \pi\left[\frac{-21+49}{6}\right]$

$V = \pi\left[28/6\right] = \frac{14\pi}{3}\ u.a^3$

sale lo mismo

2. (1 Punto) Use integrales para calcular el área exacta de la región que se encuentra entre las gráficas de

$$y = x\ , \quad y = 3x \quad y \quad x + y = 4$$



se hacen 2 integrales: de 0 a 1 y de 1 a 2 (son 2 triángulos)

$A = \int_0^1 [(3x)-(x)]\,dx + \int_1^2 [(4-x)-(x)]\,dx$

$A = \int_0^1 2x\,dx + \int_1^2 (4-2x)\,dx$

$A = x^2\Big|_0^1 + \left(4x - x^2\right)\Big|_1^2$

$A = \underbrace{\left[1^2 - 0^2\right]}_{A_1} + \underbrace{\left[(8-2^2)-(4-1^2)\right]}_{A_2}$

$A = \underbrace{1}_{A_1} + \underbrace{1}_{A_2} = 2\ u.a^2$

3. (2 Puntos) Calcular la longitud de arco de la gráfica de $(x + 3)^2 = 8(y - 1)^3$ entre los puntos A =(-2,3/2) y B=(5,3). Nota: NO ES NECESARIO GRAFICAR

$y = \sqrt[3]{\frac{(x+3)^2}{8}} + 1 = \frac{1}{2}(x+3)^{2/3} + 1 \quad \therefore \quad y'(x) = \frac{1}{3}(x+3)^{-1/3} = \frac{1}{3(x+3)^{1/3}} \quad \therefore \quad (y'(x))^2 = \frac{1}{9(x+3)^{2/3}}$

$L = \int_{-2}^5 \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx = L = \int_{-2}^5 \sqrt{1 + \frac{1}{9(x+3)^{2/3}}}\,dx = \int_{-2}^5 \left(\frac{9(x+3)^{2/3}+1}{9(x+3)^{2/3}}\right)^{1/2} dx$

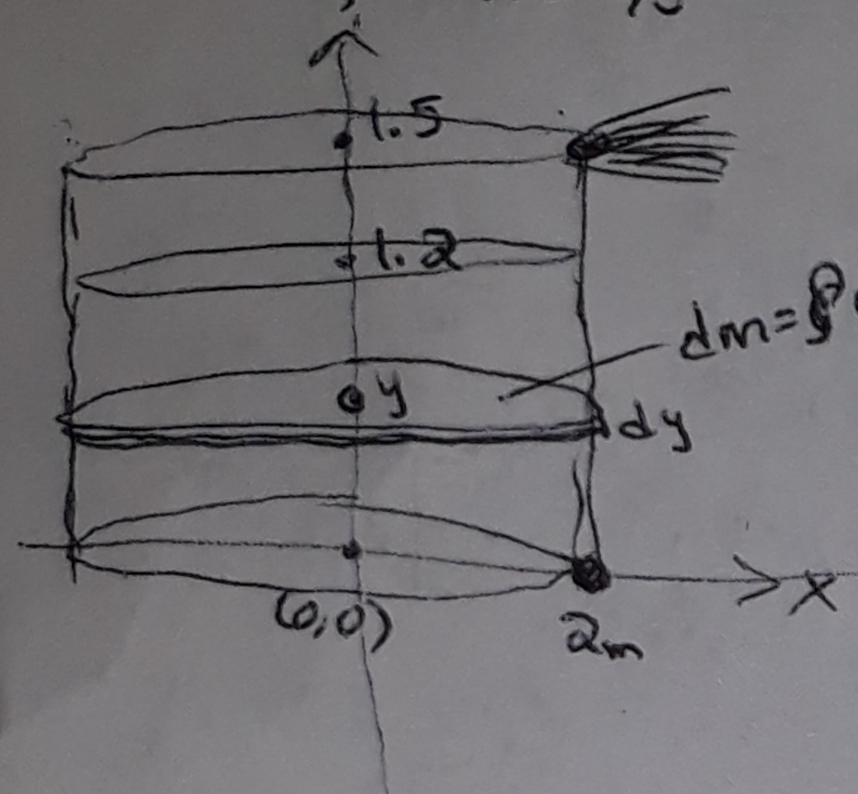
$L = \int_{-2}^5 \frac{\left(9(x+3)^{2/3}+1\right)^{1/2}}{3(x+3)^{1/3}}\,dx$, cambio de variable $m = 9(x+3)^{2/3}+1$, $dm = \frac{6}{(x+3)^{1/3}}\,dx$, $\therefore\ L = \int_{x=-2}^{5} \frac{m^{1/2}}{18}\,dm = \frac{1}{18}\,\frac{m^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{x=-2}^{5}$

$L = \frac{1}{27}\left(9(x+3)^{2/3}+1\right)^{3/2}\Bigg|_{-2}^{5} = \frac{1}{27}\left[(37)^{3/2} - (10)^{3/2}\right]$ hasta aquí. u.a.

PROFESOR

4. (2 Puntos) Una piscina elevada tiene la forma de un cilindro circular recto vertical de 2 metros de radio y 1.5 metros de altura. El agua tiene una profundidad de 1.2 metros. Calcular el trabajo de bombeo que se requiere para extraer toda el agua por la orilla en la parte superior de la piscina. (considere g=10 m/s^2)

$1.5 = 3/2$
$1.2 = 6/5$



$dm = \rho dv$

$dW = g(1.5 - y)dm$, $1.5 = \frac{3}{2}$

$dW = g(\frac{3}{2} - y)\rho dV$

$dW = g\rho(\frac{3}{2} - y)\underbrace{\pi(2)^2 dy}_{dV}$

$W = 4\pi g\rho \int_0^{6/5} (\frac{3}{2} - y)\, dy$

$W = 4\pi g\rho \left(\frac{3}{2}y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{6/5}$

$W = 4\pi g\rho \left[\left(\frac{3}{2}\left(\frac{6}{5}\right) - \frac{(6/5)^2}{2}\right) - (0)\right]$

$W = 4\pi g\rho \left[\frac{9}{5} - \frac{18}{25}\right]$

$W = 4\pi g\rho \left(\frac{9}{5}\right)\left[1 - \frac{2}{5}\right]$

$W = \frac{36}{5}\pi g\rho \left(\frac{3}{5}\right) = \frac{108}{25}\pi g\rho$

suficiente

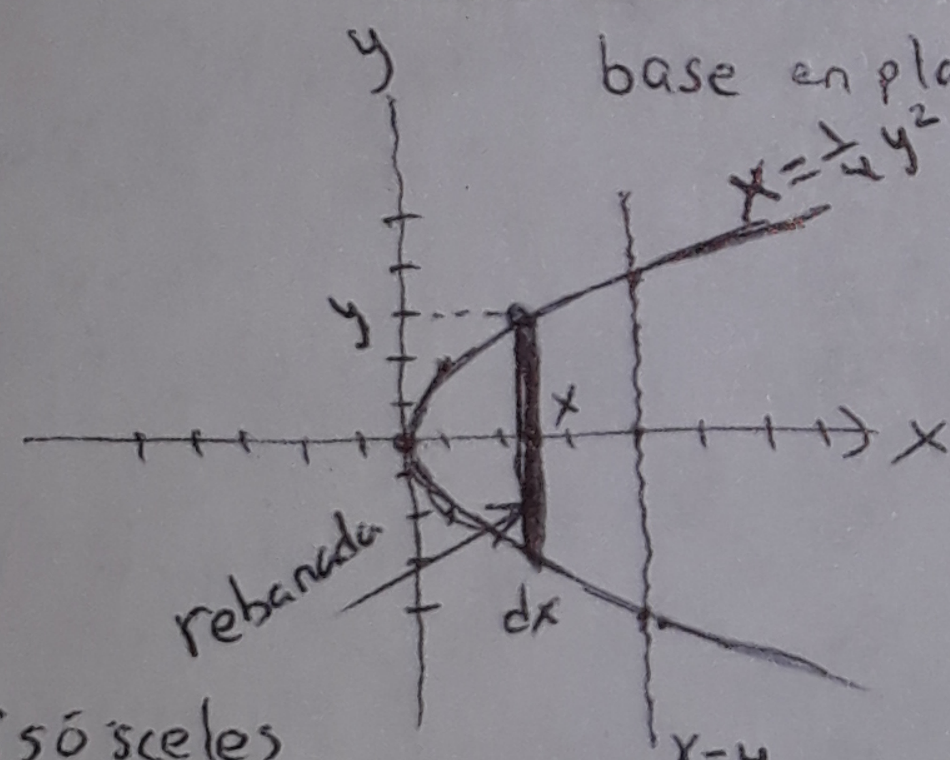
$g = 10$
$\rho = 1000$

$W = 43200\pi$ J

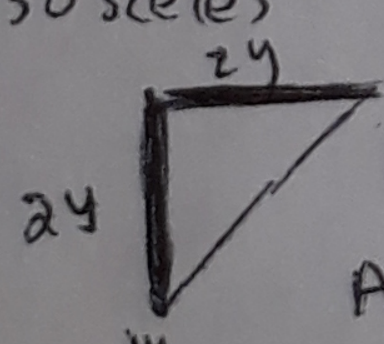
(1 punto)

5. Un sólido tiene como base la región del plano XY acotada por las gráficas $y^2 = 4x$ y $x = 4$. Halle su volumen si las secciones transversales correspondientes a planos perpendiculares al eje X son triángulos rectángulos isósceles con uno de los catetos iguales en la base del sólido.

base en plano xy



isósceles



$A = \frac{(2y)(2y)}{2} = 2y^2$

$A(x) = 2\underbrace{(4x)}_{y^2} = 8x$

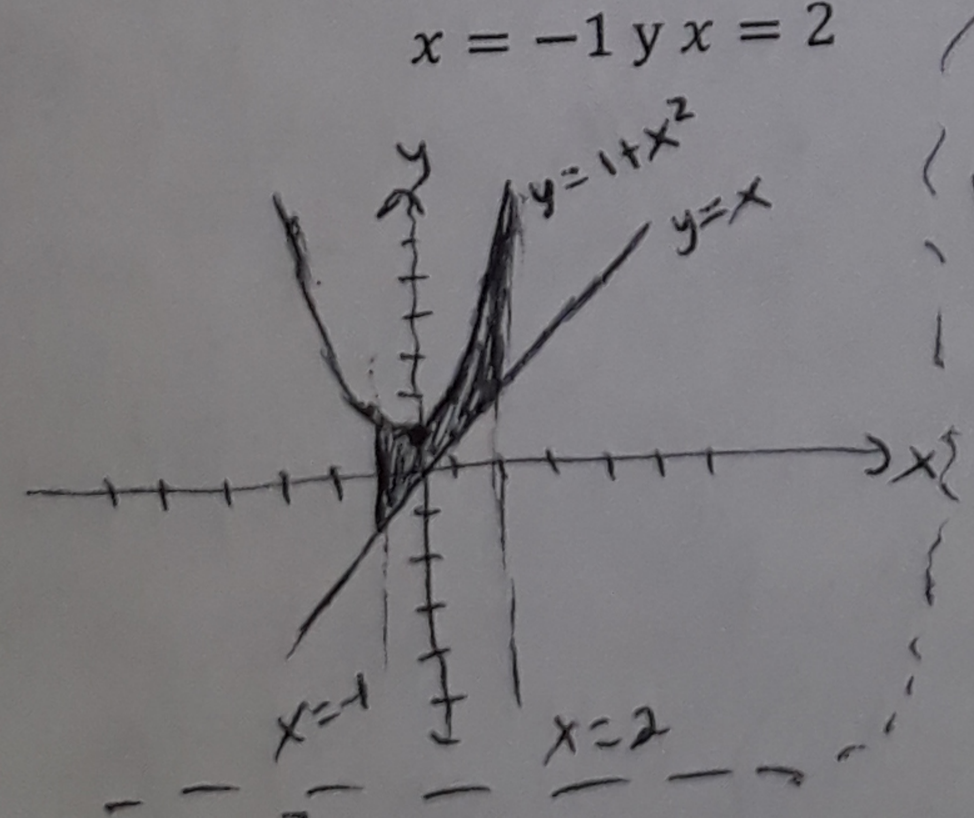
$dV = A(x)\,dx$

$V = \int_0^4 8x\, dx$

$V = 4x^2\Big|_0^4 = 64 - 0$

$V = 64$ u.a.^{3}

6. (2 Puntos) Calcule las coordenadas del centroide de la región acotada por las gráficas de $y = 1 + x^2$, $y - x = 0$, $x = -1$ y $x = 2$



$M_y = \sigma \int x(f(x) - g(x))dx$

$M_y = \sigma \int_{-1}^{2} x((1+x^2) - (x))\, dx$

$M_y = \sigma \int_{-1}^{2} (x^3 - x^2 + x)dx$

$M_y = \sigma\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{2}$

$M_y = \sigma\left[\left(4 - \frac{8}{3} + 2\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\right]$

$M_y = \sigma\left[3 - \frac{3}{4}\right] = \frac{9}{4}\sigma$

$\boxed{M_y = \frac{9}{4}\sigma}$

$M_x = \frac{1}{2}\sigma \int (f(x)^2 - g(x)^2)dx$

$M_x = \frac{1}{2}\sigma \int_{-1}^{2} \left[(1+x^2)^2 - (x)^2\right]dx$

$M_x = \frac{1}{2}\sigma \int_{-1}^{2} (x^4 + 2x^2 + 1 - x^2)dx$

$M_x = \frac{1}{2}\sigma \int_{-1}^{2} (x^4 + x^2 + 1)dx$

$M_x = \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_{-1}^{2}$

$M_x = \frac{1}{2}\sigma\left[\left(\frac{32}{5} + \frac{8}{3} + 2\right) - \left(\frac{-1}{5} + \frac{-1}{3} - 1\right)\right]$

$M_x = \frac{1}{2}\sigma\left[\frac{33}{5} + \frac{9}{3} + 3\right] = \frac{1}{2}\sigma\left[\frac{33}{5} + 6\right]$

$M_x = \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{63}{5}\right) = \frac{63}{10}\sigma$

$M_x = \frac{63}{10}\sigma$

$m_T = \sigma \int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))dx$

$m_T = \sigma \int_{-1}^{2} ((1+x^2) - (x))dx$

$m_T = \sigma\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^{2}$

$m_T = \sigma\left[\left(\frac{8}{3} - \cancel{2} + \cancel{2}\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1\right)\right]$

$\boxed{m_T = \frac{9}{2}\sigma}$

$\boxed{\bar{x} = \frac{M_y}{m_T} = \frac{\frac{9}{4}\sigma}{\frac{9}{2}\sigma} = \frac{1}{2} \text{ u.a}}$

$\boxed{\bar{y} = \frac{M_x}{m_T} = \frac{\frac{63}{10}\sigma}{\frac{9}{2}\sigma} = \frac{14}{10} \text{ u.a}} = \frac{7}{5}$

$\boxed{CM = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{5}\right) \text{ u.a}}$