UASLP, IICO. ING. FISICA. CALCULO II. **Examen 5**. Capítulo 9 31-Mayo-2019.

Nombre: PROFESOR . Calificación: _______ puntos de máximo **10**.

INSTRUCCIONES: Utilice una NOTACIÓN MATEMÁTICA VÁLIDA y CLARA para resolver cada ejercicio en el espacio correspondiente. JUSTIFICAR CADA RESPUESTA y subráyela ó enciérrela para que se le pueda asignar una calificación. PROHIBIDO EL USO DE CALCULADORA, CELULAR Y/O LAPTOP.

Problema 1 (2 puntos).

$$A=\int \frac{x^5-x^3+1}{x^3+4x}\,dx = \int\left(x^2-5+\frac{20x+1}{x^3+4x}\right)dx$$

$$\begin{array}{r} x^2-5 \\ x^3+4x\,\overline{)\,x^5-x^3+1} \\ -(x^5+4x^3) \\ \hline -5x^3+1 \\ -(-5x^3-20x) \\ \hline 20x+1 \end{array}$$

$$A=\int\left(x^2-5+\frac{20x+1}{x(x^2+4)}\right)dx=\int\left(x^2-5+\frac{a}{x}+\frac{bx}{x^2+4}+\frac{c}{x^2+4}\right)dx$$

$$\boxed{A=\frac{1}{3}x^3-5x+a\ln|x|+\frac{b}{2}\ln|x^2+4|+\frac{c}{2}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{2}+cte}$$

respuesta. Falta encontrar a, b y c

Para a, b y c

$20x+1=a(x^2+4)+bx^2+cx$

con $x=0$ ∴ $1=4a+0b+0c$ ∴ $a=\frac{1}{4}$

con $x=1$ ∴ $21=5a+b+c$

con $x=-1$ ∴ $-19=5a+b-c$

restándolas $40=2c$ $c=20$

$b=21-5a-c=21-\frac{5}{4}-20=-\frac{1}{4}$ ∴ $b=-\frac{1}{4}$

$$\boxed{A=\frac{1}{3}x^3-5x+\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{8}\ln|x^2+4|+10\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{2}+cte}$$

Problema 2 (2 puntos)

$$B=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\sin^3(2x)\cos^2(2x)\,dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4}\operatorname{sen}^2(2x)\cos^2(2x)\operatorname{sen}(2x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/4}(1-\cos^2(2x))\cos^2(2x)\operatorname{sen}(2x)\,dx$$

$$B=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/4}\left(\cos^2(2x)-\cos^4(2x)\right)\operatorname{sen}(2x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/4}(m^2-m^4)\frac{dm}{-2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{m^3}{3}-\frac{m^5}{5}\right)\Bigg|_{x=\pi/6}^{\pi/4}$$

$m=\cos 2x$

$dm=-2\operatorname{sen}2x\,dx$

$$B=\left(-\frac{1}{6}\cos^3 2x+\frac{1}{10}\cos^5 2x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/4}=\left(-\frac{1}{6}\left(\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}\right)^3+\frac{1}{10}\left(\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}\right)^5\right)-\left(-\frac{1}{6}\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^3+\frac{1}{10}\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^5\right)$$

$$B=(0)-\left(-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{32}\right)=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{20}\right)=\underline{\frac{17}{960}}$$

Problema 3. (6 puntos). Resuelva a) y b) (2.5 puntos c/u) y **DEMUESTRE** que el resultado es el mismo (1 punto).

a) (2.5 puntos) Resuelva C utilizando el método de integración por partes.

$$C = \int \frac{x^3}{\sqrt{9+4x^2}}dx = \frac{1}{4}x^2\sqrt{9+4x^2} - \int\left(\frac{1}{4}\right)(2)x\sqrt{9+4x^2}\,dx = \frac{1}{4}x^2\sqrt{9+4x^2} - \frac{1}{2}\int x(9+4x^2)^{1/2}dx$$

$u = x^2 \quad \therefore du = 2x\,dx$

$dv = \frac{x}{\sqrt{9+4x^2}}dx \quad \therefore v = \frac{1}{8}\frac{\sqrt{9+4x^2}}{1/2} = \frac{1}{4}\sqrt{9+4x^2}$

$m = 9+4x^2$

$dm = 8x\,dx$

$$C = \frac{1}{4}x^2\sqrt{9+4x^2} - \frac{1}{16}\frac{(9+4x^2)^{3/2}}{3/2} = \frac{1}{4}x^2\sqrt{9+4x^2} - \frac{1}{24}(9+4x^2)^{3/2} + cte$$

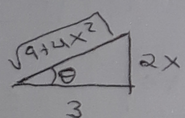
(suficiente para 2.5)

factorizando

$$C = \frac{1}{4}\sqrt{9+4x^2}\left(x^2 - \frac{1}{6}(9+4x^2)\right) = \frac{1}{4}\sqrt{9+4x^2}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{24}\sqrt{9+4x^2}\,(2x^2-9)$$

b) (2.5 puntos) Resuelva C utilizando una sustitución geométrica adecuada.

$$C = \int \frac{x^3}{\sqrt{9+4x^2}}dx = \int \frac{\frac{27}{8}\tan^3\theta}{3\sec\theta}\left(\frac{3}{2}\sec^2\theta\right)d\theta = \frac{27}{16}\int \tan^3\theta\sec\theta\,d\theta$$



$\tan\theta = \frac{2x}{3} \quad \therefore x = \frac{3}{2}\tan\theta \quad \therefore dx = \frac{3}{2}\sec^2\theta\,d\theta$

$\sec\theta = \frac{\sqrt{9+4x^2}}{3}$

$$C = \frac{27}{16}\int \tan^2\theta(\tan\theta\sec\theta)d\theta = \frac{27}{16}\int(\sec^2\theta - 1)\tan\theta\sec\theta\,d\theta$$

$w = \sec\theta$

$dw = \sec\theta\tan\theta\,d\theta$

$$C = \frac{27}{16}\int(w^2-1)dw = \frac{27}{16}\left(\frac{w^3}{3} - w\right) = \frac{27}{16}\left(\frac{1}{3}\sec^3\theta - \sec\theta\right)$$

$$C = \frac{9}{16}\left(\frac{\sqrt{9+4x^2}}{3}\right)^3 - \frac{27}{16}\left(\frac{\sqrt{9+4x^2}}{3}\right) = \frac{1}{48}(9+4x^2)^{3/2} - \frac{9}{16}(9+4x^2)^{1/2} + cte$$

(suficiente para 2.5)

factorizando

$$C = \frac{1}{16}(9+4x^2)^{1/2}\left[\frac{1}{3}(9+4x^2) - 9\right] = \frac{1}{16}(9+4x^2)^{1/2}\left[-6 + \frac{4x^2}{3}\right] =$$

$$C = \frac{1}{16}(9+4x^2)^{1/2}\left[\frac{-18+4x^2}{3}\right] = \frac{1}{16}\left(\frac{2}{3}\right)(9+4x^2)^{1/2}\left[-9+2x^2\right] = \frac{1}{24}\sqrt{9+4x^2}\,(2x^2-9)+$$

igual al a) L.C.Q.D